

CP-SC-FDE와 UW-SC-FDE의 점근적 동치

유 영 건*, 조 준 호**
포항공과대학교 전자전기공학과

Asymptotic Equivalence Between CP-SC-FDE and UW-SC-FDE

Young Geon Yoo*, Joon Ho Cho**

Dept. Electronic and Electrical Engineering, Pohang University of Science and Technology
*odiejoe@postech.ac.kr, **jcho@postech.ac.kr

Abstract: 본 논문에서는 주파수 영역 등화기를 사용하는 단일 반송파 시스템 (SC-FDE: single-carrier system with frequency-domain equalization)에서 블록길이가 매우 클 때의 점근적인 성능에 대해 다룬다. SC-FDE의 송신기는 데이터 수열 사이에 여분의 심볼들을 넣어 블록전송을 하는데, 이 여분의 심볼들을 넣는 방법으로 cyclic prefix (CP)를 넣는 방법과 (CP-SC-FDE), unique word (UW)를 넣는 방법이 주로 고려되고 있다 (UW-SC-FDE). CP와 UW의 길이에 대한 특정한 조건 하에서, CP-SC-FDE와 UW-SC-FDE의 각각의 등화기가 선형최소평균제곱오차 (LMMSE: linear minimum mean-squared error)를 달성하도록 설계되었을 때 각각의 평균제곱오차 (MSE: mean-squared error) 성능이 블록 길이가 무한해짐에 따라 점근적으로 같아짐을 증명한다. 한편, UW-SC-FDE에서 낮은 복잡도를 갖는 준최적의 등화기를 제안하고, 이를 사용하였을 때의 MSE가 블록 길이가 증가함에 따라 점근적으로 LMMSE 등화기를 사용하였을 때의 MSE로 수렴함을 보인다.

Keywords: SC-FDE, asymptotic analysis.

I. 서론

주파수 영역 등화기를 사용하는 단일 반송파 시스템 (SC-FDE: single-carrier system with frequency-domain equalizer)은 직교 주파수 분할 다중 (OFDM: orthogonal frequency-division multiplexing)과 비교하여 낮은 첨두전력 대 평균전력 비를 가지며, 주파수 편차에 의한 성능저하가 비교적 작은 장점을 가진다 [1]. SC-FDE는 송신단에서 데이터 수열을 블록화 할 때 삽입하는 여분의 심볼들이 cyclic prefix (CP)인지 unique word (UW)인지에 따라 크게 CP-SC-FDE와 UW-SC-FDE로 나눌 수 있다 [1]. 이들은 블록길이에 따라 성능

이 달라지며, [2]에서 블록 길이와 비트오율과의 관계에 대한 연구 결과를 찾아볼 수 있다.

한편, UW-SC-FDE에서 선형최소평균제곱오차 (LMMSE: linear minimum mean-squared error)를 달성하도록 설계된 등화기는 CP-SC-FDE에서 LMMSE를 달성하도록 설계된 등화기와 비교해서 그 복잡도가 높는데, 이에 [3]에서 복잡도를 낮춘 준최적의 등화기가 제안되기도 하였다.

본 논문에서는 등화기가 LMMSE를 달성하도록 설계되었을 때의 CP-SC-FDE와 UW-SC-FDE의 평균제곱오차 (MSE: mean-squared error) 성능이 블록 길이가 무한해짐에 따라 같은 값으로 수렴함을 수학적으로 엄밀히 증명하였다¹⁾. 또한 UW-SC-FDE에서 [3]에서 제안된 것보다 복잡도가 더 낮은 준최적의 등화기를 제안하고, 이를 사용하였을 때의 MSE가 블록 길이가 무한대로감에 따라 LMMSE 등화기를 사용하였을 때의 MSE로 수렴함을 보였다.

II. 신호 및 시스템 모델

1. CP-SC-FDE

송신단에서 데이터 수열이 N 개의 연속되는 심볼들로 블록화 되고, 각 블록 앞에 K 개의 CP가 붙여지는 CP-SC-FDE를 고려하자. 블록화 된 데이터 수열은 $1/T$ (symbols/sec) 속도로 선형변조 되어 전송되며 이는 주파수 선택적 채널을 거쳐 수신기로 전달된다. 송신 파형과 수신필터를 모두 고려한 채널의 충격응답을 $h(t)$ 라고 하자. 수신된 신호는 M/T (symbols/sec) 속도로 샘플링 되는데, 여기서 M 은 정수로 가정한다. 샘플링 된 채널의 충격응답 $\{h[n]\}_n = \{h(nT/M)\}_n$ 은 임의의 정수 L 에 대해 $n \in [0, L-1]$ 을 제외한 구간에서 0값을 가지며, 다음과 같이 절대가합이라고 가정하자.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty \quad (1)$$

본 연구는 정보통신연구진흥원 및 정보통신부의 대학 IT연구센터 육성·지원사업의 지원을 받고 있는 포항공과대학교의 OFDM 기반 광대역 이동 인터넷 연구센터 (BrOMA)에 의해 일부를 지원받았으며 (IITA-2006-C1090-0603-0037), 일부는 2006년 정부(교육인적자원부)의 재원으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 수행된 연구임 (KRF-2006-331-D00338)

1) 비록 [2]에서 블록길이가 무한해짐에 따라 CP-SC-FDE와 zero-padded SC-FDE의 비트오율이 같은 값으로 수렴함을 언급하고, 그 수렴값을 제시하였으나 이에 대한 엄밀한 증명이 없으며, 제시된 수렴값도 잘못된 것으로 보인다.

만약 $L \leq KM+1$ 이 만족된다면, 수신 신호에서 첫 수신 심볼로부터 CP에 대응되는 KM 개의 심볼들을 제거함으로써 블록간 간섭을 완전히 제거할 수 있으며, 이에 따라 각각의 블록들을 독립적으로 처리할 수 있다. 이때 각 수신된 블록은 다음과 같이 쓸 수 있다 [4].

$$\mathbf{z}_{CP} = \mathbf{H}\Psi^{(M)}\mathbf{b} + \mathbf{v} \quad (2)$$

여기서 \mathbf{b} 는 $N \times 1$ 벡터로, 송신기에서 전송하고자 하는 정보를 담고 있는 데이터 심볼들로 이루어져 있으며, \mathbf{v} 는 $MN \times 1$ 벡터로 잡음성분을 나타낸다. $\Psi^{(M)}$ 은 $MN \times N$ 행렬로, \mathbf{b} 의 각 성분들 후에 $(M-1)$ 개의 영의 심볼들을 넣는 역할을 하며, 이는 오버샘플링에 의해 나타난다. \mathbf{H} 는 $MN \times MN$ 행렬로서, 채널을 나타내며 그 첫 번째 행이 $[h[0], h[1], \dots, h[L], 0, \dots, 0]^T$ 인 순환행렬이다. \mathbf{b} 와 \mathbf{v} 가 각각 다음과 같은 자기상관함수를 가진다고 가정하자.

$$E\{\mathbf{b}\mathbf{b}^H\} = \sigma_b^2 \mathbf{I}_N, \quad E\{\mathbf{v}\mathbf{v}^H\} = \sigma_v^2 \mathbf{I}_{MN} \quad (3)$$

여기서 \mathbf{I}_N 는 $N \times N$ 대각행렬을 나타낸다.

주파수 영역 등화를 위해서 수신신호 \mathbf{z}_{CP} 는 discrete Fourier transform (DFT)되어 주파수 영역으로 전환된다. N -point DFT 행렬을 \mathbf{W}_N 으로 표기하고, 이의 (m,n) 성분을 $[\mathbf{W}_N]_{m,n} = 1/\sqrt{N} \exp(-j2\pi mn/N)$ 으로 놓자. DFT된 수신 벡터 $\hat{\mathbf{z}}_{CP} = \mathbf{W}_{MN}\mathbf{z}_{CP}$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\hat{\mathbf{z}}_{CP} = \frac{1}{\sqrt{M}} \hat{\mathbf{H}} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}} \\ \hat{\mathbf{b}} \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{b}} \end{bmatrix} \quad (M\text{번 반복}) + \hat{\mathbf{v}} \quad (4)$$

위 식에서 $\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{W}_N \mathbf{b}$, $\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{W}_{MN} \mathbf{H} \mathbf{W}_{MN}^H$, $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{W}_{MN} \mathbf{v}$ 으로 각각 정의된다. 여기서 \mathbf{H} 가 순환행렬이기 때문에 $\hat{\mathbf{H}}$ 는 대각행렬로 나타난다. 주파수 영역 등화는 $N \times MN$ 행렬 \mathbf{G}_{CP} 를 $\hat{\mathbf{z}}_{CP}$ 에 곱함으로써 이루어진다. 여기서 \mathbf{G}_{CP} 는 다음과 같이 정의된 MSE를 최소화하는 방향으로 정해진다.

$$\epsilon_{CP} = \frac{1}{N} E\{\|\hat{\mathbf{b}} - \mathbf{G}_{CP} \hat{\mathbf{z}}_{CP}\|^2\} \quad (5)$$

다음과 같이 $MN \times N$ 행렬 $\bar{\mathbf{H}}$ 를 정의하자.

$$\bar{\mathbf{H}} = \hat{\mathbf{H}} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_N \\ \mathbf{I}_N \\ \vdots \\ \mathbf{I}_N \end{bmatrix} \quad (M\text{번 반복}) \quad (6)$$

적교원리를 이용하면, (5)와 같이 정의된 MSE를 최소화하는 \mathbf{G}_{CP} 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{G}_{CP} = \frac{1}{\sqrt{M}} \bar{\mathbf{H}}^H \left(\frac{1}{M} \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{H}}^H + \frac{\sigma_v^2}{\sigma_b^2} \mathbf{I}_{MN} \right)^{-1} \quad (7)$$

이러한 LMMSE 등화기를 사용하였을 때의 MSE ϵ_{CP} 는 다음과 같이 나타난다.

$$\epsilon_{CP} = \frac{\sigma_b^2}{N} \text{tr} \left\{ \left(\mathbf{I}_N + \frac{\sigma_b^2}{M\sigma_v^2} \bar{\mathbf{H}}^H \bar{\mathbf{H}} \right)^{-1} \right\} \quad (8)$$

2. UW-SC-FDE

송신단에서 데이터 수열이 $(N-K)$ 개의 연속되는 심볼들로 블록화되고 각 블록 후에 K 개의 UW가 붙여지는 UW-SC-FDE를 고려하자. UW를 넣어 전송하였을 때의 수신된 각 블록은 다음과 같이 쓸 수 있다 [3].

$$\mathbf{z}_{UW} = \mathbf{H}\Psi^{(M)}(\mathbf{b}_z + \mathbf{u}) + \mathbf{v} \quad (9)$$

위 식에서 \mathbf{b}_z 와 \mathbf{u} 는 각각 정보를 담고 있는 데이터 블록과 UW를 나타내는 $N \times 1$ 벡터이며 \mathbf{b}_z 는 마지막 K 개의 성분은 영의 값을 가지며, \mathbf{u} 의 경우 처음 $(N-K)$ 개의 성분이 영의 값을 갖는다. 나머지 표기들은 앞서 (2)에서 정의한 것과 같으며, $E\{\mathbf{b}_z \mathbf{b}_z^H\}$ 는 다음과 같다.

$$E\{\mathbf{b}_z \mathbf{b}_z^H\} = \sigma_b^2 \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N-K} & \mathbf{0}_{N-K,K} \\ \mathbf{0}_{K,N-K} & \mathbf{0}_K \end{bmatrix} \quad (10)$$

위 식에서 $\mathbf{0}_{N-K,N}$ 은 $(N-K) \times N$ 영행렬을 나타내며, $\mathbf{0}_K$ 는 $K \times K$ 영행렬을 나타낸다. 수신기에서 \mathbf{H} 와 \mathbf{u} 를 알고 있다는 가정 하에 수신 신호에서 \mathbf{u} 를 완벽히 제거할 수 있으며, 결과적으로 남은 신호는 다음과 같다.

$$\mathbf{z}_{UW} = \mathbf{H}\Psi^{(M)}\mathbf{b}_z + \mathbf{v} \quad (11)$$

다음과 같이 $\boldsymbol{\Theta}^{(K,N)}$ 을 정의하자.

$$\boldsymbol{\Theta}^{(K,N)} = \mathbf{W}_N \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N-K} & \mathbf{0}_{N-K,K} \\ \mathbf{0}_{K,N-K} & \mathbf{0}_K \end{bmatrix} \mathbf{W}_N^H \quad (12)$$

CP-SC-FDE와 마찬가지로, 주파수 영역 등화는 $N \times MN$ 행렬 \mathbf{G}_{UW} 를 $\hat{\mathbf{z}}_{UW} = \mathbf{W}_{MN}\mathbf{z}_{UW}$ 에 곱함으로써 이루어지며, LMMSE를 달성하는 \mathbf{G}_{UW} 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{G}_{UW} = \frac{1}{\sqrt{M}} \boldsymbol{\Theta}^{(K,N)} \bar{\mathbf{H}}^H \left(\frac{1}{M} \bar{\mathbf{H}} \boldsymbol{\Theta}^{(K,N)} \bar{\mathbf{H}}^H + \frac{\sigma_v^2}{\sigma_b^2} \mathbf{I}_{MN} \right)^{-1} \quad (13)$$

이를 사용하였을 때의 MSE는 다음과 같이 나타난다.

$$\epsilon_{UW} = \frac{\sigma_b^2}{N-K} \text{tr} \left\{ \boldsymbol{\Theta}^{(K,N)} \left(\mathbf{I}_N + \frac{\sigma_b^2}{M\sigma_v^2} \bar{\mathbf{H}}^H \bar{\mathbf{H}} \boldsymbol{\Theta}^{(K,N)} \right)^{-1} \right\} \quad (14)$$

한편, 데이터 블록 사이에 CP나 UW를 붙여서 전송하는 경우 전송 속도와 전송 파워의 손실이 발생하는데, 이를 점근적으로 없애기 위하여, K 를 N 에 대한 함수로 보았을 때, 다음을 만족한다고 가정한다.

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{K[N]}{N} = 0 \quad (15)$$

III. 점근적 동치

특정한 sequence of matrices 간에 점근적 동치의 관계를 정의할 수 있으며 이러한 관계를 갖는 sequence of matrices들은 행렬의 고유값과 관련해서 비슷한 성질을 갖는 것으로 알려진다 [4]. 이를 이용하여 ϵ_{CP} 와 ϵ_{UW} 가 블록 길이 N 이 증가함에 따라 점근적으로 같아짐을 보이려고 한다. 임의의 $N \times N$ 행렬 \mathbf{A} 에 대해서 strong norm $\|\mathbf{A}\|$ 과 weak norm $|\mathbf{A}|$ 을 각각 다음과 같이 정의할 수 있다 [4].

$$\| \mathbf{A} \| = \max_{\| \mathbf{x} \| = 1} (\mathbf{x}^H \mathbf{A}^H \mathbf{A} \mathbf{x})^{1/2} \quad (16)$$

$$|\mathbf{A}| = \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} |a_{k,l}|^2 \right)^{1/2} \quad (17)$$

위 식에서 $a_{k,l}$ 는 \mathbf{A} 의 (k,l) 성분을 나타낸다.

다음으로, \mathbf{A}_N 과 \mathbf{B}_N 을 각각 $N \times N$ 행렬이라고 하자. 이들은 N 이 증가함에 따라 그 차원이 증가하는 sequence of matrices이다. 두 sequence of matrices는 다음의 (18), (19) 조건을 만족할 때, 점근적으로 동치라 정의하며 $\mathbf{A}_N \sim \mathbf{B}_N$ 와 같이 표기한다 [4]. (18)에서 C 는 임의의 양수를 의미한다.

$$\| \mathbf{A}_N \|, \| \mathbf{B}_N \| \leq C < \infty, \quad N=1,2,\dots \quad (18)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |\mathbf{A}_N - \mathbf{B}_N| = 0 \quad (19)$$

이렇게 점근적으로 동치인 \mathbf{A}_N 과 \mathbf{B}_N 의 k 번째 고유값이 각각 $\alpha_{N,k}$ 과 $\beta_{N,k}$ 일 때, 임의의 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 다음 식이 성립하는 것으로 알려진다 [4].

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(\alpha_{N,k}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(\beta_{N,k}) \quad (20)$$

앞서 제시된 (8), (14)에서의 trace 안의 행렬을 비롯하여, 앞선 절에서 정의된 행렬들은 블록 길이 N 이 증가함에 따라 그 크기도 늘어나기 때문에 블록 길이에 따른 sequence of matrices로 간주할 수 있다.

정리 1: (1)과 (15)의 조건 하에, 다음 식이 성립한다.

$$\left(\mathbf{I}_N + \frac{\sigma_b^2}{M\sigma_v^2} \overline{\mathbf{H}}^H \overline{\mathbf{H}} \right)^{-1} \sim \boldsymbol{\Theta}^{(K,N)} \left(\mathbf{I}_N + \frac{\sigma_b^2}{M\sigma_v^2} \overline{\mathbf{H}}^H \overline{\mathbf{H}} \boldsymbol{\Theta}^{(K,N)} \right)^{-1}$$

증명: 우선 $\mathbf{I}_N \sim \boldsymbol{\Theta}^{(K,N)}$ 을 보인다. 이는 임의의 정방행렬에 관하여 strong norm과 weak norm이 그 행렬의 앞뒤로 각각 임의의 unitary 행렬을 곱했을 때 변하지 않으므로, [5, p.290], 다음을 보이는 것과 같다.

$$\mathbf{I}_N \sim \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N-K} & \mathbf{0}_{N-K,K} \\ \mathbf{0}_{K,N-K} & \mathbf{0}_K \end{bmatrix} \quad (21)$$

위 (21)에서 양변의 행렬의 고유값들은 각각 1의 상한을 가짐을 알 수 있다. 따라서 이 행렬들의 strong norm 역시 모두 1의 상한을 가지며, 결과적으로 점근적 동치를 위한 첫 번째 조건 (18)을 만족한다. 또한 두 행렬의 차의 weak norm은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\left| \mathbf{I}_N - \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N-K} & \mathbf{0}_{N-K,K} \\ \mathbf{0}_{K,N-K} & \mathbf{0}_K \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N-K} & \mathbf{0}_{N-K,K} \\ \mathbf{0}_{K,N-K} & \mathbf{I}_K \end{bmatrix} \right| = \sqrt{\frac{K}{N}} \quad (22)$$

앞선 (15)의 조건에 따라 (22)는 N 이 무한대로 감에 0으로 수렴하게 된다. 따라서 $\mathbf{I}_N \sim \boldsymbol{\Theta}^{(K,N)}$ 이 성립한다. 다음으로 $\overline{\mathbf{H}}^H \overline{\mathbf{H}} \sim \overline{\mathbf{H}}^H \overline{\mathbf{H}} \boldsymbol{\Theta}^{(K,N)}$ 을 보인다. Strong norm과 weak norm에는 각각 다음과 같은 부등식의 적용이 가능하다 [5, p.290],[4, p.16].

$$\| \overline{\mathbf{H}}^H \overline{\mathbf{H}} \boldsymbol{\Theta}^{(K,N)} \| \leq \| \overline{\mathbf{H}}^H \overline{\mathbf{H}} \| \cdot \| \boldsymbol{\Theta}^{(K,N)} \| \quad (23)$$

$$\| \overline{\mathbf{H}}^H \overline{\mathbf{H}} \boldsymbol{\Theta}^{(K,N)} - \overline{\mathbf{H}}^H \overline{\mathbf{H}} \| \leq \| \overline{\mathbf{H}}^H \overline{\mathbf{H}} \| \cdot \| \boldsymbol{\Theta}^{(K,N)} - \mathbf{I}_N \| \quad (24)$$

위의 (23), (24)와 앞서 보였던 $\mathbf{I}_N \sim \boldsymbol{\Theta}^{(K,N)}$ 의 사실에 의

하여 $\overline{\mathbf{H}}^H \overline{\mathbf{H}} \sim \overline{\mathbf{H}}^H \overline{\mathbf{H}} \boldsymbol{\Theta}^{(K,N)}$ 이 성립하는 데에는 임의의 상수 C 에 대하여 모든 N 에 대해서 $\| \overline{\mathbf{H}}^H \overline{\mathbf{H}} \| \leq C < \infty$ 의 조건이 충분조건임을 알 수 있다. $\overline{\mathbf{H}}^H \overline{\mathbf{H}}$ 는 대각행렬로서 (1)의 가정에 의해, 각 성분들이 유한한 상한을 가지며, 즉 고유값들도 유한한 상한을 가진다. 따라서 이의 strong norm도 같은 값의 상한을 가지며, 결과적으로 $\overline{\mathbf{H}}^H \overline{\mathbf{H}} \sim \overline{\mathbf{H}}^H \overline{\mathbf{H}} \boldsymbol{\Theta}^{(K,N)}$ 이 성립한다. 앞선 사실을 바탕으로 strong norm과 weak norm에 각각 삼각부등식 [5, p.290]을 적용하면 다음을 간단히 보일 수 있다.

$$\mathbf{I}_N + \frac{\sigma_b^2}{M\sigma_v^2} \overline{\mathbf{H}}^H \overline{\mathbf{H}} \sim \mathbf{I}_N + \frac{\sigma_b^2}{M\sigma_v^2} \overline{\mathbf{H}}^H \overline{\mathbf{H}} \boldsymbol{\Theta}^{(K,N)} \quad (25)$$

위 식에서 양변의 행렬은 각각 그 고유값으로 1의 하한을 가지는 positive definite 행렬임을 쉽게 알 수 있다.

즉 $\left(\mathbf{I}_N + \frac{\sigma_b^2}{M\sigma_v^2} \overline{\mathbf{H}}^H \overline{\mathbf{H}} \right)^{-1}$ 와 $\left(\mathbf{I}_N + \frac{\sigma_b^2}{M\sigma_v^2} \overline{\mathbf{H}}^H \overline{\mathbf{H}} \boldsymbol{\Theta}^{(K,N)} \right)^{-1}$ 의 각각의 strong norm은 1의 상한을 가지며, 이때 다음과 같은 식이 성립한다 [4, p.17].

$$\left(\mathbf{I}_N + \frac{\sigma_b^2}{M\sigma_v^2} \overline{\mathbf{H}}^H \overline{\mathbf{H}} \right)^{-1} \sim \left(\mathbf{I}_N + \frac{\sigma_b^2}{M\sigma_v^2} \overline{\mathbf{H}}^H \overline{\mathbf{H}} \boldsymbol{\Theta}^{(K,N)} \right)^{-1} \quad (26)$$

위 (26)과 두 sequence of matrices의 곱이 각각의 sequence of matrices와 점근적으로 동치인 sequence of matrices의 곱과 점근적으로 동치인 사실을 이용하면 [4, p.17], 결론을 얻을 수 있다. ■

따름정리 1: (1)과 (15)의 조건 하에, 다음이 성립한다.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \epsilon_{\text{CP}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \epsilon_{\text{UW}} \quad (27)$$

증명: (15)에서 $1/(N-K)$ 는 $(1/N) \cdot (N/(N-K))$ 로 나누어 쓸 수 있으며, 블록 길이 N 이 무한대로 갈 때, $N/(N-K)$ term은 1로 수렴하므로, $\lim_{N \rightarrow \infty} \epsilon_{\text{UW}}$ 을 다음과 같이 쓰는 것이 가능하다.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \epsilon_{\text{UW}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \text{tr} \left\{ \sigma_b^2 \boldsymbol{\Theta}^{(K,N)} \left(\mathbf{I}_N + \frac{\sigma_b^2}{M\sigma_v^2} \overline{\mathbf{H}}^H \overline{\mathbf{H}} \boldsymbol{\Theta}^{(K,N)} \right)^{-1} \right\}$$

임의의 행렬의 trace는 그 안의 행렬의 고유값들의 합이므로, 정리 1과 (20)에 의하여 결론을 얻을 수 있다. ■

IV. UW-SC-FDE에서 근사화된 등화행렬의 사용

\mathbf{G}_{CP} 가 대각행렬들로 이루어진 블록 행렬인 것과는 달리, \mathbf{G}_{UW} 는 그러한 구조를 가지고 있지 않기 때문에, UW-SC-FDE에서의 LMMSE 등화의 복잡도는 CP-SC-FDE에서의 LMMSE 등화의 복잡도보다 일반적으로 더 높다 [2],[3]. 이 때문에 UW-SC-FDE에서 어느 정도의 성능 저하 하에서 등화기의 복잡도를 낮추는 방법이 제안되기도 하였다 [3]. 이와 비슷한 방법으로, UW-SC-FDE에서 등화의 복잡도를 낮추기 위해 \mathbf{G}_{UW} 대신 \mathbf{G}_{CP} 를 등화행렬로 사용하는 것을 생각할 수 있다. 이 경우에 등화기의 복잡도가 크게 낮아지지만, 어느 정도의 성능 열화가 발생한다. 구체적으로, UW-SC-FDE에서 \mathbf{G}_{CP} 를 사용

하였을 때의 MSE $\tilde{\epsilon}_{UW}$ 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\tilde{\epsilon}_{UW} = \frac{\sigma_b^2}{N-K} \text{tr} \left\{ \mathbf{\Theta}^{(K,N)} - \mathbf{\Theta}^{(K,N)} \bar{\mathbf{H}}^H \mathbf{G}_{CP}^H \mathbf{G}_{CP} \bar{\mathbf{H}} \mathbf{\Theta}^{(K,N)} + \mathbf{G}_{CP} \left(\frac{1}{M} \bar{\mathbf{H}} \mathbf{\Theta}^{(K,N)} \mathbf{H}^H + \sigma_v^2 \mathbf{I}_N \right) \mathbf{G}_{CP}^H \right\} \quad (28)$$

정리 2: (1)과 (15)의 조건 하에 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{\epsilon}_{UW} = \lim_{N \rightarrow \infty} \epsilon_{CP} = \lim_{N \rightarrow \infty} \epsilon_{UW} \quad (29)$$

증명: 우선 (28)의 trace 안의 행렬과 아래 (30)의 행렬을 각각 sequence of matrices로 간주하였을 때, 이들이 점근적으로 동치임을 보이도록 한다.

$$\mathbf{I}_N - \bar{\mathbf{H}}^H \mathbf{G}_{CP}^H \mathbf{G}_{CP} \bar{\mathbf{H}} + \mathbf{G}_{CP} \left(\frac{1}{M} \bar{\mathbf{H}} \mathbf{H}^H + \sigma_v^2 \mathbf{I}_N \right) \mathbf{G}_{CP}^H \quad (30)$$

위 (30) 행렬에서 \mathbf{G}_{CP} 에 (7)을 대입하면 ϵ_{CP} 의 trace 안의 행렬과 같게 된다. 즉 이들의 점근적 동치를 보임으로써 (20)을 이용하여 보이고자 하는 결론에 도달할 수 있다. 점근적 동치를 위한 충분조건이 첫째로 $\mathbf{G}_{CP} \bar{\mathbf{H}}$ 의 strong norm이 모든 N 에 대하여 유한한 상수의 상한을 가지고, 둘째로 $\bar{\mathbf{H}} \mathbf{\Theta}^{(K,N)} \mathbf{H}^H$ 과 $\bar{\mathbf{H}} \mathbf{H}^H$ 이 점근적으로 동치임을 strong norm과 weak norm에 삼각부등식과 (23), (24)의 부등식을 이용하여 보일 수 있다. $\mathbf{G}_{CP} \bar{\mathbf{H}}$ 의 strong norm이 모든 N 에 대하여 유한한 상수의 상한을 가진다는 점은 앞선 과정을 이용하면 쉽게 보일 수 있다. 한편, (23)의 부등식을 이용해서 $\bar{\mathbf{H}} \mathbf{\Theta}^{(K,N)} \mathbf{H}^H$ 과 $\bar{\mathbf{H}} \mathbf{H}^H$ 의 strong norm이 각각 모든 N 에 대하여 유한한 상수의 상한을 가짐을 보일 수 있다. 또한 weak norm과 Frobenius norm과의 관계와, Frobenius norm이 unitary invariance 성질을 가지는 사실을 이용하면 [5, p290], 다음을 보일 수 있다.

$$\|\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{I}_N - \mathbf{\Theta}^{(K,N)})\mathbf{H}^H\| \leq \frac{1}{\sqrt{M}} \|\bar{\mathbf{H}}^H\| \cdot \|(\mathbf{I}_N - \mathbf{\Theta}^{(K,N)})\| \cdot \|\bar{\mathbf{H}}^H\|$$

$\mathbf{I}_N \sim \mathbf{\Theta}^{(K,N)}$ 이므로, 위 식은 N 이 무한대로 감에 따라 0으로 수렴한다. 즉 $\bar{\mathbf{H}} \mathbf{\Theta}^{(K,N)} \mathbf{H}^H \sim \bar{\mathbf{H}} \mathbf{H}^H$ 이 성립한다. ■

V. 수치적 결과

앞선 절에서의 결과를 확인하기 위하여 특정한 조건에서 SC-FDE의 신호 대 잡음비 (SINR: signal-to-interference plus noise ratio) 성능을 블록 길이를 변화시켜 가며 구하였다. SC-FDE에서 송신 파형은 roll-off factor가 0.5인 square-root raised cosine pulse로 설정하였으며 채널은 그 충격응답이 $h(t) = \sum_{k=1}^3 c_k \delta(k - Td_k)$ 이므로, $[c_1, c_2, c_3]$ 는 $[-0.4 + 0.4i, 0.4 + 0.1i, -0.1 - 0.2i]$ 이고, $[d_1, d_2, d_3]$ 는 $[0, 4.7, 10.1]$ 이다. 수신필터는 송신파형의 주파수 영역 내에서 균일한 전력 스펙트럼을 갖는 저역필터로 설정하였다. 그림 1에서, 앞서 수학적으로 증명한 바와 같이 각 시스템의 SINR 성능이 블록 길이가 커짐에 따라 모두 같은 값으로 수렴함을 볼 수 있다.

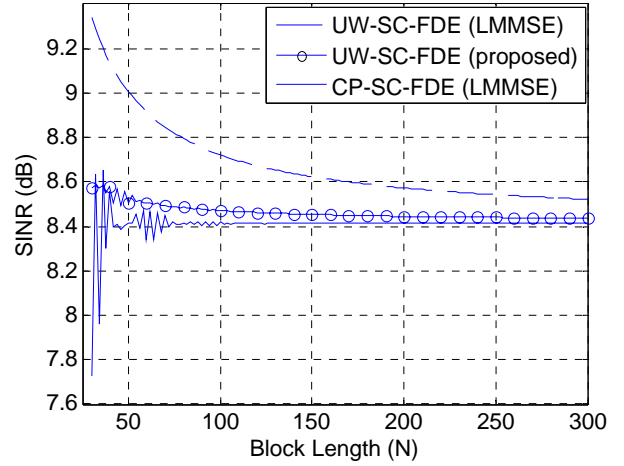


그림 1. 블록 길이에 따른 SINR 성능비교

VI. 결론

본 논문에서는 CP-SC-FDE와 UW-SC-FDE에서 등화기가 각각 LMMSE를 달성하도록 설계되었을 때의 MSE 성능이 블록 길이가 무한대로 감에 따라 서로 같아짐을 증명하였다. 또한 UW-SC-FDE에서 준최적이지만 복잡도가 낮은 등화기를 제안하고, 이를 사용하였을 때의 MSE가 블록 길이가 무한대로 감에 따라 LMMSE를 달성하도록 설계된 등화기의 MSE로 수렴함도 증명하였다.

참고 문헌

- [1] D. Falconer, S. Ariyavistakul, A. Benyamin-Seeyar and B. Eidson, "Frequency domain equalization for single-carrier broadband wireless systems," *IEEE Trans. Commun. Mag.*, vol. 40, no. 4, pp. 27-36, Apr. 2002.
- [2] S. Ohno, "Performance of single-carrier block transmissions over multipath fading channels with linear equalization," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 54, no. 10, pp. 3678-3687, Oct. 2006.
- [3] J. P. Coon, M. A. Beach, and J. P. McGeehan, "Minimum mean-square error frequency-domain equalisation in unique-word based single-carrier systems" *IEE Electronics Letters*, vol. 40, pp. 1003-1006, Aug. 2004.
- [3] Y. G. Yoo and J. H. Cho, "Asymptotic equivalence of SC LMMSE-FDE to continuous-time LMMSE equalizer," in *Proc. IEEE WCNC '07*, Hong Kong, China, Mar. 2007, pp. 1475-1480.
- [4] R. M. Gray, *Toeplitz and Circulant Matrices: A Review*. Information Theory Laboratory, Stanford Univ., Stanford, CA. [Online]. Available: <http://ee.stanford.edu/~gray/toeplitz.pdf>
- [5] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, NY: Cambridge Univ. Press, 1985.